

Egy többrészes feladat

Az interneten találtuk az alábbi feladatot – 1. ábra.

- 15.1** Geraden Kreiskegeln mit dem Öffnungswinkel φ und 8 cm langen Mantellinien werden Kugeln einbeschrieben. Stelle den Kugelradius ρ in Abhängigkeit von φ dar.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ergebnis : } \rho = \frac{4 \sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \text{ cm} \end{array} \right)$$

- 15.2** Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{4 \sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}$ für $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Entnimm dem Graphen φ_0 für den größten Funktionswert $f(\varphi_0)$, und ermittle φ_0 durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet. Berechne mit diesem Wert die Oberfläche der größten Inkugel und die Oberfläche des zugehörigen Kegels.

- 15.3** Begründe durch Rechnung, dass es keinen Kegel gibt, dessen Mantelfläche gleich der Oberfläche seiner Inkugel ist.

1. ábra – forrása: [1]

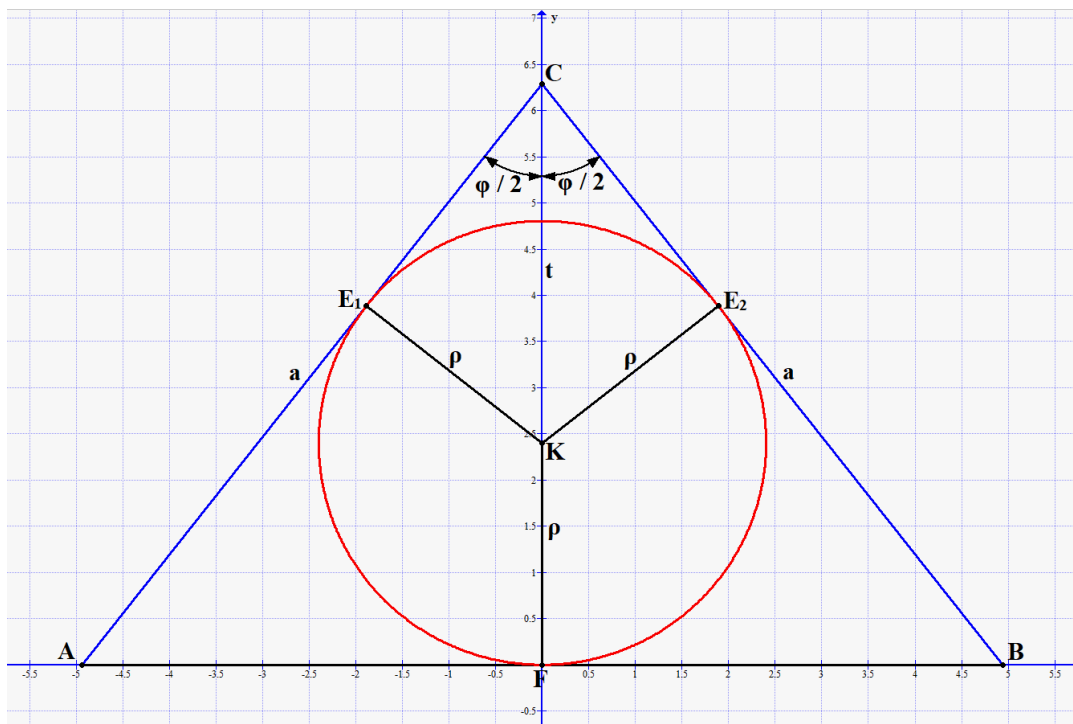
Ez egy háromrészes feladat, melynek részeit egyenként megoldjuk.

1. Feladat

Egy egyenes körkúpba beírnunk egy gömböt. A kúp nyílásszöge φ , alkotójának hossza $a = 8 \text{ cm}$. Állítsuk fel a beírt gömb ρ sugarának φ -től való függését kifejező képletet!

Megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

A 2. ábra alapján írhatjuk:

$$t + \rho = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} ; \quad (1)$$

$$\frac{\rho}{t} = \sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow t = \frac{\rho}{\sin \frac{\varphi}{2}} . \quad (2)$$

Most (1) és (2) - vel:

$$\frac{\rho}{\sin \frac{\varphi}{2}} + \rho = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \rho \cdot \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} + 1 \right) = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \rho \cdot \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow$$

$$\rho = a \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\rho = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} .}} \quad (3)$$

Az $a = 8 \text{ cm}$ - es adattal is:

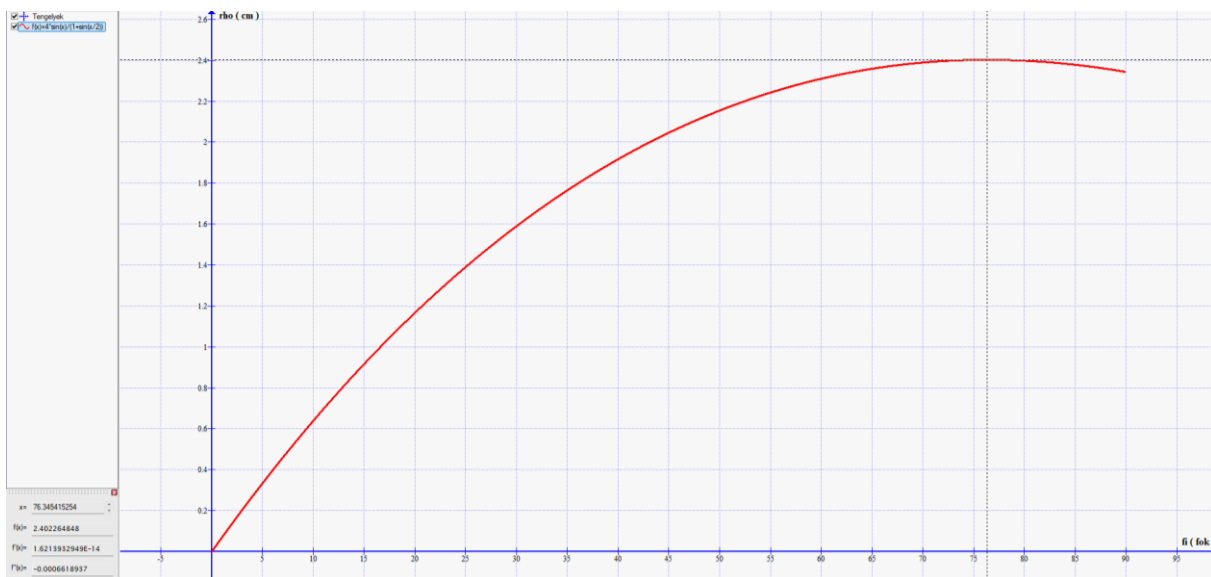
$$\underline{\underline{\rho(\varphi) = 4 \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \text{ (cm) .}}} \quad (a)$$

2. Feladat

Rajzoljuk meg az (a) függvény ábráját a $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ intervallumon, és határozzuk meg azt a φ_0 értéket, amelyhez a legnagyobb ρ érték tartozik! Ezzel az értékkel számítsuk ki a legnagyobb beírt gömb és a megfelelő kúp felszínét!

Megoldás

Az (a) függvény ábrája a 3. ábrán szemlélhető.



3. ábra

Erről leolvasható, hogy:

$$\varphi_0 = 76,34^\circ ; \quad \rho(\varphi_0) = 2,402 \text{ (cm)} . \quad (b)$$

Most [2] alapján:

$$\underline{\underline{F_{be,gömb}}} = 4 \cdot \pi \cdot \rho^2(\varphi_0) = 4 \cdot \pi \cdot 2,402^2 \text{ (cm}^2 \text{)} \cong \underline{\underline{72,5 \text{ cm}^2}} . \quad (c)$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_{kúp}}} &= \pi \cdot \rho(\varphi_0) \cdot [\rho(\varphi_0) + a] = \\ &= \pi \cdot 2,402 \text{ (cm)} \cdot [2,402 \text{ (cm)} + 8 \text{ (cm)}] \cong \underline{\underline{78,5 \text{ cm}^2}} . \end{aligned} \quad (d)$$

3. Feladat

Mutassa ki számítással, hogy nem létezik olyan kúp, melynek palástfelszíne egyenlő a beírt gömbje felszínével!

Megoldás

Ismét [2] alapján a kúpalást felszíne:

$$M_{kúp} = \pi \cdot R \cdot a \rightarrow R = a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \rightarrow M_{kúp} = \pi \cdot a^2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} ; \quad (4)$$

a beírt gömb felszíne, (3) - mal is:

$$F_{be,gömb} = 4 \cdot \pi \cdot \rho^2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} ; \quad (5)$$

most (4) és (5) egyenlővé tételével, majd átalakításokkal:

$$\begin{aligned} \pi \cdot a^2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} &= 4 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} \rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin^2 \varphi}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} \rightarrow \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 &= \sin^2 \varphi , \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 &= \left(2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 = 4 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} , \\ \frac{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2}{4 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \right) , \\ \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{4 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} &= 1 - \sin \frac{\varphi}{2} . \end{aligned} \quad (6)$$

Most alkalmazva a

$$v = \sin \frac{\varphi}{2} \quad (7)$$

helyettesítést, (6) és (7) - tel kapjuk:

$$\frac{1+v}{4 \cdot v} = 1 - v \rightarrow 1 + v = 4 \cdot v - 4 \cdot v^2 \rightarrow 4 \cdot v^2 - 3 \cdot v + 1 = 0. \quad (8)$$

A (8) másodfokú egyenletre a megoldóképletet alkalmazva:

$$v_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{8}. \quad (9)$$

Mivel a gyök alatt negatív szám áll, így nincs valós megoldás, tehát nincs olyan eset, amelyre teljesülne a $M_{kúp} = F_{be,gömb}$ feltétel.

Megjegyzések:

M1. A (3) függvény maximumhelyét és a maximum értékét általában is meghatározhatjuk. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (10)$$

Most a

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \quad (3)$$

függvényt deriválva és a deriváltat zérussal egyenlővé téve:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} = 0 \rightarrow \cos \varphi \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\cos \varphi \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \rightarrow$$

$$\frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \left(2 \cdot \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \left(2 \cdot \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}}{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \rightarrow \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \rightarrow$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (11)$$

Bevezetve az

$$u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (12)$$

rövidítő jelölést, (11) és (12) - vel a következő egyenletet kapjuk:

$$\sqrt{1+u^2} + u = \frac{u}{1-u^2} . \quad (13)$$

Átalakításokkal:

$$\sqrt{1+u^2} = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u-u+u^3}{1-u^2} = u \cdot \frac{u^2}{1-u^2} \rightarrow 1+u^2 = u^2 \cdot \left(\frac{u^2}{1-u^2} \right)^2 . \quad (14)$$

Ismét egy új rövidítő jelöléssel:

$$U = u^2 , \quad (15)$$

így (14) és (15) - tel:

$$\begin{aligned} 1+U &= U \cdot \left(\frac{U}{1-U} \right)^2 \rightarrow 1 = U \cdot \left(\frac{U}{1-U} \right)^2 - U \rightarrow 1 = U \cdot \left[\frac{U^2}{(1-U)^2} - 1 \right] \rightarrow \\ 1 &= U \cdot \frac{U^2 - (1-U)^2}{(1-U)^2} \rightarrow (1-U)^2 = U \cdot [U^2 - (1-2 \cdot U + U^2)] \rightarrow \\ (1-U)^2 &= U \cdot (2 \cdot U - 1) \rightarrow 1 - 2 \cdot U + U^2 = 2 \cdot U^2 - U \rightarrow \\ U^2 + U - 1 &= 0 . \end{aligned} \quad (16)$$

Ezt a másodfokú egyenletet a megoldóképlettel megoldva:

$$U_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} ; \quad (17)$$

mivel (15) miatt $U > 0$, így (12) és (17) -ből:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = u_0^2 \rightarrow u_0 = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \rightarrow \frac{\varphi_0}{2} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) \rightarrow \\ \varphi_0 &= 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) = 76,34^\circ , \end{aligned} \quad (18)$$

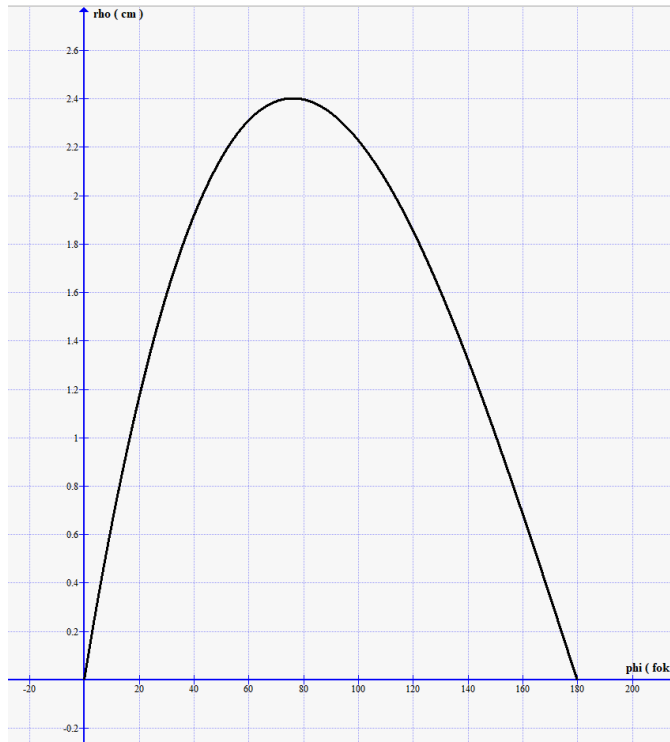
egyezésben (b / 1) - gyel.

M2. A 2. ábra a 2. feladat (b) eredményeivel készült, azokat jeleníti meg.

M3. Eddig nem tudatosodott bennünk, hogy ρ - nak maximuma van, adott a mellett.
Most pótoltuk ezt a hiányosságot.

M4. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó készítsen ábrát, amely a beírt gömb sugarának változását szemlélteti, $a = 8 \text{ cm}$ és $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ esetében, néhány lépésben!

M5. Ha $a = 8 \text{ cm}$ és $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$, akkor a 4. ábrát kapjuk a beírt gömb ρ sugarára.



4. ábra

Ez a kúp nyílásszögére vonatkozó teljes értelmezési tartományt lefedi.

Nem túl életszerű a határokon a $\leq$ jelet megengedni; ezt azért mondjuk, mert a feladat is ezt tette, legalábbis az alsó határon. Helyette a $<$ jel tűnik helyesnek.

Források:

[1] – https://mathe-physik-aufgaben.de/aufgaben/Rm_au042.pdf

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2025. 05. 13.

Továbbiak: www.galgoczi.net